数理解析研究所講究録
506巻 1983年 25-42



# コンパクト距離空間上の擬軌道追跡条件を満たす拡大的な同相写像について

都立大 理　平出 耕一

$(X, d)$ を距離空間，$f: X \to X$ は同相写像とする。
$f$ が拡大的 (expansive) であるとは，$\exists e > 0$ s.t. $d(f^n(x), f^n(y)) \leqq e$ $(\forall n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = y$ が成立する時をいう。ここで $e$ は $f$ の拡大定数とよばれる．$X$ の点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が $f$ の $\delta$-擬軌道 ($\delta$-pseudo orbit) であるとは，$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$ が成立する時を言う．$f$ が擬軌道追跡条件 (pseudo orbit tracing property 以後 P.O.T.P. と書く) を満たすとは，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall \delta$-擬軌道 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に対し $\exists x \in X$ s.t. $d(f^i(x), x_i) < \varepsilon$ が成立する時をいう．上の点 $x \in X$ は $\{x_i\}$ を $\varepsilon$-追跡 ($\varepsilon$-trace) するという．$X$ がコンパクトであるとき，上で定義された $f$ の性質は $X$ の位相と両立する距離関数によらない。 $\forall x \in X$，$\varepsilon > 0$ に対し

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leqq \varepsilon,\ n \geqq 0\}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leqq \varepsilon,\ n \leqq 0\}$$ とおく．

$T^n$ を $n$ 次元トーラスとする．自己同型 $\sigma: T^n \to T^n$ が双曲型であ

るとは、$\sigma$を被覆する自己同型 $\tilde{\sigma}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が絶対値1の固有値を持たない時を言う。

A. Manning は、$T^n$上の Anosov 微分同相は ある双曲型トーラス自己同型と位相共役である（実際にはもっと一般的に infranilmanifold 上の Anosov 微分同相は ある hyperbolic infranilmanifold automorphism と位相共役である）ことを示した [13]。 $C^\infty$級閉多様体上の Anosov 微分同相は P.O.T.P. を満たす拡大的な微分同相である [14]。 ここでは次の定理の証明に関連するいくつかの定理を述べる。

<u>定理 A</u>　　$f: T^n \to T^n$ は P.O.T.P. を満たす拡大的な同相写像とする。そのとき $f$ は ある双曲型トーラス自己同型と位相共役である。

(注) 双曲型トーラス自己同型と位相共役な同相写像は P.O.T.P. を満たし、拡大的である。

## §1　マルコフ分割

$(X, d)$ はコンパクト距離空間，$f: X \to X$ は P.O.T.P. を満たす拡大的な同相写像とする。 $f$ の一つの拡大定数を $e > 0$ とし，$\varepsilon_0 = e/4$ とおく。

<u>補題 1.1</u>　　$0 < \delta_0 < \varepsilon_0$ が存在して、$x, y \in X$ が $d(x, y) < \delta_0$ ならば $W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y)$ は一点からなる。

証明　$f$ は P.O.T.P. を満たすから、$0<\delta_0<\varepsilon_0/2$ が存在して、任意の $\delta_0$-擬軌道は $X$ の点によって $\varepsilon_0/2$-追跡される。$x, y \in X$ は $d(x, y)<\delta_0$ であるとする。

$$x_i = \begin{cases} f^i(x) & i \geqq 0 \\ f^i(y) & i < 0 \end{cases}$$

によって定義される $X$ の点列 $\{x_i\}$ は $\delta_0$-擬軌道である。よって $z \in X$ が存在して $d(f^i(z), x_i) < \varepsilon_0/2$. すなわち $z \in W^s_{\varepsilon_0/2}(x) \subset W^s_{\varepsilon_0}(x)$. また $d(x, y) < \varepsilon_0/2$ だから $z \in W^u_{\varepsilon_0}(y)$. したがって $W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y) \neq \emptyset$。$f$ は拡大的で拡大定数は $4\varepsilon_0$ であるから、$W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y)$ は一点のみからなる。//

$\delta_0>0$ を上のものとしよう。$\Delta(\delta_0) = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \delta_0\}$ とおく。$[\ ,\ ] ; \Delta(\delta_0) \to X$ を $(x, y) \in X \times X$ に対し $[x, y] \in W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y)$ を対応させることにより定義する。

補題 1.2　$[\ ,\ ] ; \Delta(\delta_0) \to X$ は連続写像で次を満たす。

a) $[x, x] = x$

b) $[[x, y], z] = [x, z]$, $[x, [y, z]] = [x, z]$（両辺が定義されているとき）

証明　$\Delta(\delta_0)$ の点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $(x, y) \in \Delta(\delta_0)$ に収束するとしよう。$z_n = [x_n, y_n]$ とおく。$X$ はコンパクトだから、$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ は $z \in X$ に収束する。$[\ ,\ ]$ の定義から、$\forall i \geqq 0$, $n_j$ に対して

$$d(f^i(x_{n_j}), f^i(z_{n_j})) \leqq \varepsilon_0$$

したがって　$d(f^i(x), f^i(z)) \leqq \varepsilon_0$　$(i \geqq 0)$　すなわち　$z \in W^s_{\varepsilon_0}(x)$.
同様に　$z \in W^u_{\varepsilon_0}(y)$.　したがって　$z = [x, y]$.　これは $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[x, y]$ に収束することを意味する。　a)は明らか.
b)を示す.　$[x.y] \in W^s_{\varepsilon_0}(x)$ だから, $[[x.y], z] \in W^s_{2\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(z)$.
$f$は拡大的だから　$[[x.y], z] = [x, z]$.　同様に $[x, [y.z]] = [x, z]$ //

<u>命題 1.3 ( local product structure )</u>

$0 < \delta_1 < \delta_0/2$　と　$0 < \rho < \delta_1$ が存在して, $\forall x \in X$ に対し,

$W^u_{loc}(x) = \{ y \in W^u_{\varepsilon_0}(x) \mid d(x.y) < \delta_1 \}$,

$W^s_{loc}(x) = \{ y \in W^s_{\varepsilon_0}(x) \mid d(x.y) < \delta_1 \}$,

$N_x = [W^u_{loc}(x), W^s_{loc}(x)]$　とおいたとき, 次が成立する;

a) $N_x$ は $X$ の開集合で, $\mathrm{diam}(N_x) < \delta_0$,

b) $[\,,\,]$ ; $W^u_{loc}(x) \times W^s_{loc}(x) \to N_x$ は同相写像,

c) $N_x \supset B_\rho(x)$　ここで　$B_\rho(x) = \{ y \in X \mid d(x.y) \leqq \rho \}$.

<u>証明</u>　補題 1.2 と [15] の p125 によって, $0 < \delta_1 < \delta_0/2$ が存在して, a) と b) が成立する. c)を示そう. $g$ ; $\Delta(\delta_0) \to \mathbb{R}$ を $g(x.y) = \mathrm{diam}\{x, [y.x], [x.y]\}$ と定義する. そのとき 補題1.2 より $g$ は連続で $g(x, x) = 0$ である.　$X$ はコンパクトだから. $0 < \rho < \delta_1$ が存在して, $d(x.y) \leqq \rho$ ならば $g(x.y) < \delta_1$. このとき $[y.x] \in W^u_{loc}(x)$, $[x.y] \in W^s_{loc}(x)$ である. $f$は拡大的だから, $y = [[y.x], [x.y]] \in N_x$.
//

$\rho>0$, $W^u_{loc}(x)$, $W^s_{loc}(x)$ は上のものとしよう．

<u>定義</u>　$R\subset X$ が矩形であるとは、$\mathrm{diam}\, R \leqq \rho$ かつ $x, y\in R$ ならば $[x, y]\in R$ を満たす時をいう。更に $R=cl(\mathrm{int}R)$ となるとき、矩形 $R$ は proper という．　ただし，$\mathrm{int}\, R$ は $R$ の interior，$cl(\mathrm{int}R)$ は $\mathrm{int}\, R$ の閉包．

<u>定義</u>　$X$ の有限被覆 $\mathcal{R}=\{R_1, \cdots, R_m\}$ が次を満たすとき、$\mathcal{R}$ を $X$ のマルコフ分割という．

a) 各 $R_i$ は proper な矩形

b) $\mathrm{int}\, R_i \cap \mathrm{int}\, R_j = \phi$ $(i\neq j)$

c) $x\in \mathrm{int}\, R_i \cap f^{-1}(\mathrm{int}\, R_j)$ のとき，

$fW^s(x, R_i)\subset W^s(f(x), R_j)$, $fW^u(x, R_i)\supset W^u(f(x), R_j)$

ただし、$W^\sigma(x, R_i) = W^\sigma_{loc}(x)\cap R_i$ $(\sigma=u, s)$.

<u>定理 B</u>　$(X, d)$ はコンパクト距離空間，$f: X\to X$ は P.O.T.P. を満たす拡大的な同相写像とする．　そのとき　$X$ は矩形の長径が任意に小さいマルコフ分割をもつ．

$X$ のマルコフ分割から有限型 subshift $\Sigma$ と次を満たす写像 $\pi: \Sigma\to X$ が構成される [3]，[4]．

1) $\pi: \Sigma \to X$ は上への連続写像

2) $\pi\circ\tau = f\circ\pi$　ここで　$\tau: \Sigma\to\Sigma$ は shift

3) $\exists d>0$ s.t. $\forall x\in X$ に対し，$\# \pi^{-1}(x)\leqq d$

<u>定義</u>　$f$ の zeta 函数 $\zeta_f$ は以下で与えられる formal power

seriesである.

$$\zeta_f(z) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} z^m\right)$$

ここで、$N_m$ は $f$ の周期 $m$ の周期点の個数.

定理Bと[12]から次が成立.

系　$f: X \to X$ は定理Bと同じとする. そのとき $\zeta_f$ は有理函数である.

## §2 不動点指数

$M$ を $C^\infty$ 級閉多様体とする. $f: M \to M$ は P.O.T.P. を満たす拡大的な同相写像とする. $M$ に適当なリーマン計量を与える. そのとき、$^\exists r_0 > 0$, $r_0 \geqq {}^\forall r > 0$ に対し、$\exp_x; \{v \in T_xM \mid \|v\| \leqq r\} \to B_r(x)$ は同相写像. $r_0 \geqq e > 0$ は $f$ の拡大定数とし、$\varepsilon_0 = e/4$ に対する補題1.1と補題1.3における数を $\delta_0, \delta_1, \rho$ とする. $^\forall x \in M$ に対し

$W^u_{loc}(x) = \{ y \in W^u_{\varepsilon_0}(x) \mid d(x, y) < \delta_1 \}$ の $x$ の連結成分,

$W^s_{loc}(x) = \{ y \in W^s_{\varepsilon_0}(x) \mid d(x, y) < \delta_1 \}$ の 〃 ,

$N_x = [\, W^u_{loc}(x),\ W^s_{loc}(x) \,]$ とおく.

命題 2.1　$^\forall x \in M$ に対し

a) $N_x$ は $M$ の連結な開集合で、$\mathrm{diam}\, N_x < \delta_0$,

b) $[\,,\,]$ ; $W^u_{loc}(x) \times W^s_{loc}(x) \to N_x$ は同相写像,

c) $N_x \supset B_\rho(x)$,

d) $W^u_{loc}(x)$, $W^s_{loc}(x) \supsetneqq \{x\}$.

証明　略

補題 2.2　$A, B$ は加群で $A$ と $B$ のテンソル積 $A \otimes B \cong \mathbb{Z}$ とする．そのとき，$A, B \cong \mathbb{Z}$．

証明　$\varphi ; A \otimes B \to \mathbb{Z}$ を同型写像とする．$^\exists \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i \in A \otimes B$ s.t. $\varphi(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i) = 1$．　$\varphi_A ; \sum^m A$（$m$ 個の $A$ の直和）$\to \mathbb{Z}$ を $x_1 + \cdots + x_m \in \sum^m A$ に対し $\varphi(\sum_{i=1}^{m} x_i \otimes b_i)$ を対応させる準同型としよう。そのとき $\varphi_A$ は全射であるから，$\sum^m A \cong \mathrm{Ker}\,\varphi_A \oplus \mathbb{Z}$．$\varphi_B ; \sum^m B \to \mathbb{Z}$ を $y_1 + \cdots + y_n \in \sum^m B$ に対し，$\varphi(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i)$ を対応させる全射準同型とする．そのとき $\sum^m B \cong \mathrm{Ker}\,\varphi_B \oplus \mathbb{Z}$．よって $(\sum^m A) \otimes (\sum^m B) \cong \mathrm{Ker}\,\varphi_A \otimes \mathrm{Ker}\,\varphi_B \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi_A \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi_B \oplus \mathbb{Z}$．一方，$A \otimes B \cong \mathbb{Z}$ より $(\sum^m A) \otimes (\sum^m B) \cong \sum^{m^2} \mathbb{Z}$．よって $\mathrm{Ker}\,\varphi_A$ と $\mathrm{Ker}\,\varphi_B$ は有限生成自由加群．したがって $A$ と $B$ もまた有限生成自由加群．$A \otimes B \cong \mathbb{Z}$ より結論を得る．

補題 2.3　$N$ は境界のない連結な $n$ 次元多様体、$X$ と $Y$ は non-degenerate であるとする．$X \times Y$ と $N$ が同相であるならば，$^\exists p, q > 0$ $(p+q=n)$ s.t.

$$H_i(X, X-x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i=p \\ 0 & i \neq p \end{cases} (^\forall x \in X), \quad H_j(Y, Y-y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & j=q \\ 0 & j \neq q \end{cases} (^\forall y \in Y).$$

証明　$(x, y) \in X \times Y$ とする．$X, Y$ は $N$ に埋めこめるから，$X, Y$ は Hausdorff 空間である．よって $\{X \times (Y-y), (X-x) \times Y\}$ は $X \times Y$ における切除対である．Künneth の公式より分裂する

完全系列；

$$0 \to \sum_{i+j=k} H_i(X, X-x) \otimes H_j(Y, Y-y) \to H_k((X, X-x)\times(Y, Y-y))$$
$$\to \sum_{i+j=k-1} H_i(X, X-x) * H_j(Y, Y-y) \to 0$$

が存在する． $X \times Y$ は $N$ と同相だから

$$H_k((X, X-x)\times(Y, Y-y)) \cong \mathbb{Z} \ (k=n), \ \cong 0 \ (k\neq n).$$

$\sum_{i+j=k-1} H_i(X, X-x) * H_j(Y, Y-y)$ はねじれ群だから

$$\sum_{i+j=k} H_i(X, X-x) \otimes H_j(Y, Y-y) \cong \mathbb{Z} \ (k=n), \ \cong 0 \ (k\neq n).$$

補題2.2より $p, q \geq 0$ $(p+q=n)$ が存在して、

$$H_i(X, X-x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i=p \\ 0 & i\neq p \end{cases}, \quad H_j(Y, Y-y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & j=q \\ 0 & j\neq q \end{cases}.$$

明らかに $p, q$ は $(x, y) \in X\times Y$ に依存しない． $p=0$ とすると，

完全系列；

$$H_1(X, X-x)\ (\cong 0) \to H_0(X-x) \to H_0(X)\ (\cong\mathbb{Z}) \to H_0(X, X-x)\ (\cong \mathbb{Z}) \to 0$$

が存在する．したがって $H_0(X-x)=0$. これは $X$ が non-degenerate であることに反する．よって $p\neq 0$. 同様に $q\neq 0$.

<u>命題2.4</u>　$^\exists p, q > 0$ $(p+q = \dim M)$ s.t. $^\forall x \in M$ に対し

$$H_i(W^u_{loc}(x), W^u_{loc}(x)-y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i=p \\ 0 & i\neq p \end{cases} \quad ({}^\forall y \in W^u_{loc}(x))$$

$$H_j(W^s_{loc}(x), W^s_{loc}(x)-y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i=q \\ 0 & i\neq q \end{cases} \quad ({}^\forall y \in W^s_{loc}(x)).$$

<u>証明</u>　略

(注) 上の命題より $\dim M \geqq 2$ でなければならない．

$n=\dim M$ とする．$p, q>0$ $(p+q=n)$ は上の命題の整数としよう．各 $x\in M$ に対し，$H_p(W^u_{loc}(x), W^u_{loc}(x)-x)\cong \mathbb{Z}$ の生成元を表わす $p$-サイクル $C^u_x \in \Delta_p(W^u_{loc}(x))$ を固定する．そして $H_q(W^s_{loc}(x), W^s_{loc}(x)-x)\cong\mathbb{Z}$ の生成元を表わす $q$-サイクル $C^s_x\in\Delta_q(W^s_{loc}(x))$ を固定する．
$\partial$ をバウンダリ準同型とすると，$\partial C^u_x \in \Delta_{p-1}(W^u_{loc}(x)-x)$. したがって $W^u_{loc}(x)$ における $x$ の近傍 $D^{u'}_x$ が存在して，$\forall z\in D^{u'}_x$ に対し $\partial C^u_x \in \Delta_{p-1}(W^u_{loc}(x)-z)$. 同様に $W^s_{loc}(x)$ における $x$ の近傍 $D^{s'}_x$ が存在して $\partial C^s_x\in\Delta_{q-1}(W^s_{loc}(x)-z)$，$(\forall z\in D^{s'}_x)$.

$V_x$ を $N_x$ での $x$ の標準近傍とし，$\sigma\in\Delta_n(N_x)$ は $H_n(N_x, N_x-V_x)\cong\mathbb{Z}$ の生成元を表わすサイクルとする．そのとき $\sigma$ は $H_n(N_x,N_x-y)\cong\mathbb{Z}$ $(\forall y\in V_x)$ の生成元を表わすサイクルでもある．Künnethの公式より $[\,,\,]_*([C^u_x]_x\times[C^s_x]_x)$ は $H_n(N_x,N_x-x)\cong\mathbb{Z}$ の生成元である．これはサイクル $[\,,\,]_\#(C^u_x\nabla C^s_x)$ によって表わされる．ここで $\nabla$ は Eilenberg-MacLane の写像である．したがって $c\in\Delta_{n+1}$, $d\in\Delta_n(N_x-x)$ が存在して，

$$[\,,\,]_\#(C^u_x\nabla C^s_x)-\varepsilon\sigma=\partial c+d \quad (\varepsilon=+1 \text{ 又は } -1).$$

$N_x$ での $x$ の近傍 $V'_x(\subset V_x)$ が存在して，$d\in\Delta_n(N_x-z)$ $(\forall z\in V'_x)$.
$D^u_x$, $D^s_x$ をそれぞれ $W^u_{loc}(x)$, $W^s_{loc}(x)$ における $x$ の近傍で $D^u_x\subset D^{u'}_x$, $D^s_x\subset D^{s'}_x$ かつ $[D^u_x, D^s_x]\subset V'_x$ を満たすものとしよう。そのとき，$\forall z_1\in D^u_x$, $\forall z_2\in D^s_x$ に対し，$[C^u_x]_{z_1}$ は $H_p(W^u_{loc}(x), W^u_{loc}(x)-z_1)\cong\mathbb{Z}$ の生成元，

$[C_x^s]_{z_2}$ は $H_q(W_{loc}^s(x), W_{loc}^s(x)-z_2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元である．各 $x \in M$ に対し $H_x = [D_x^u, W_{loc}^s(x)]$ とおく．$H_x$ は $M$ における $x$ の近傍である，$z \in H_x$ とする．$[z, x] \in D_x^u$ である．$\varphi_{x,z}; H_p(W_{loc}^u(x), W_{loc}^u(x)-x) \to H_p(W_{loc}^u(x), W_{loc}^u(x)-[z,x])$ は $[C_x^u]_x$ を $[C_x^u]_{[z,x]}$ に対応させることにより定まる同型とする。

$\Sigma_{x,z}^u = [N_x, z]$ とおく．そのとき、写像 $[\ , z]; W_{loc}^u(x) \to \Sigma_{x,z}^u$ は同相写像であり、$\Sigma_{x,z}^u \cap W_{loc}^u(z)$ は $W_{loc}^u(z)$ と $\Sigma_{x,z}^u$ の開集合である．

$j_{x,z}; W_{loc}^u(z) \cap \Sigma_{x,z}^u \hookrightarrow \Sigma_{x,z}^u$ と $i_{x,z}; W_{loc}^u(z) \cap \Sigma_{x,z}^u \hookrightarrow W_{loc}^u(z)$ は包含写像とする．そのとき、$j_{x,z*}; H_p(W_{loc}^u(z) \cap \Sigma_{x,z}^u, W_{loc}^u(z) \cap \Sigma_{x,z}^u - z) \to H_p(\Sigma_{x,z}^u, \Sigma_{x,z}^u - z)$，$i_{x,z*}; H_p(W_{loc}^u(z) \cap \Sigma_{x,z}^u, W_{loc}^u(z) \cap \Sigma_{x,z}^u - z) \to H_p(W_{loc}^u(z), W_{loc}^u(z)-z)$ は同型である．そこで、同型 $\alpha_x^z; H_p(W_{loc}^u(x), W_{loc}^u(x)-x) \to H_p(W_{loc}^u(z), W_{loc}^u(z)-z)$ を合成写像 $\alpha_x^z = i_{x,z*} \circ j_{x,z*}^{-1} \circ [\ , z]_* \circ \varphi_{x,z}$ により定義する．$a, b \in H_x$ に対し，$\alpha_{a,x}^b = \alpha_x^b \circ (\alpha_x^a)^{-1}$ とおく．

<u>補題 2.5</u>　$a, b \in H_x \cap H_y$ $(x, y \in M)$ に対し，path $\ell: [t_1, t_2] \to H_x \cap H_y$ s.t. $\ell(t_1) = a$, $\ell(t_2) = b$ が存在すると仮定する。そのとき、
$\alpha_{a,x}^b = \alpha_{a,y}^b$.

<u>証明</u>　略

path $\ell: [0,1] \to M$ が与えられたとき，$0 = s_0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_m = 1$ と $x_i \in M$ $(i = 1, \cdots, m)$ が存在して，$\ell([s_{i-1}, s_i]) \subset H_{x_i}$ を満たす．そこで $\ell_*; H_p(W_{loc}^u(\ell(0)), W_{loc}^u(\ell(0)) - \ell(0)) \to H_p(W_{loc}^u(\ell(1)), W_{loc}^u(\ell(1)) - \ell(1))$ を

$$\ell_* = \alpha_{\ell(s_{m-1}),\, x_m}^{\ell(s_m)} \circ \cdots \circ \alpha_{\ell(s_0),\, x_1}^{\ell(s_1)}$$

により定義する．補題2.5よりこれは well-defined である．

$\pi$ ; $\overline{M} \to M$ は次を満たす covering projection とする．

1) $\overline{M}$ は連結

2) $f: M \to M$ を被覆する同相写像 $\overline{f}: \overline{M} \to \overline{M}$ が存在する．

$\overline{M}$ に $M$ の pull back metric を入れる．$\overline{f}$ は P.O.T.P. を満たす拡大的な同相写像である [14]．$M$ の local product structure を持ち上げて $\overline{M}$ の local product structure を得る．このとき $M$ と同様 $\ell: [0.1] \to \overline{M}$ に対して $\ell_*: H_p(W^u_{loc}(\ell(0)), W^u_{loc}(\ell(0)) - \ell(0)) \to H_p(W^u_{loc}(\ell(1)), W^u_{loc}(\ell(1)) - \ell(1))$ を定義する．　$\pi_x \doteqdot \pi|W^u_{loc}(x)$ ; $W^u_{loc}(x) \to W^u_{loc}(\pi(x))$　$(x \in \overline{M})$ とする．

<u>補題 2.6</u>　$\ell: [0.1] \to \overline{M}$ s.t. $\ell(0) = x$, $\ell(1) = y$ とする．そのとき

$$\pi_{y*} \circ \ell_* = (\pi \circ \ell)_* \circ \pi_{x*}$$

<u>証明</u>　略

<u>定義</u>　$\overline{M}$ が u-orientable であるとは、任意の closed path $\ell$ に対し、$\ell_* = id.$ が成立するときをいう．

<u>命題 2.7</u>　$\overline{M}$ が $M$ の普遍被覆空間であるとき、$\overline{M}$ は u-orientable

$x_0 \in M$ とする．$A = \{\alpha^2 \mid \alpha \in \pi_1(M, x_0)\}$ とし、$G = A$ によって生成される $\pi_1(M, x_0)$ の正規部分群，すなわち，$G = \{\beta_1 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1^{-1} \cdots \beta_t \cdot \alpha_t \cdot \beta_t^{-1} \mid \alpha_i \in A$, $\beta_i \in \pi_1(M, x_0)\}$．$G$ に対する covering projection を $P$ ; $(\widetilde{M}, \tilde{x}_0) \to (M, x_0)$ とする．すなわち $P_*(\pi_1(\widetilde{M}, \tilde{x}_0)) = G$．　$\pi_1(M, x_0)/G$ は有限であるから，$P$ ; $\widetilde{M} \to M$ は有限被覆である．明らかに $f: M \to M$ を被覆する同相写像 $\tilde{f}: \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ が存在する．

命題 2.8　$\widetilde{M}$ は u-orientable

$\overline{M}$ が u-orientable であるとき，$H_p(W^u_{loc}(x_0), W^u_{loc}(x_0)-x_0) \cong \mathbb{Z}$ $(x_0 \in \overline{M})$ の生成元 $O^u_{x_0}$ を固定し，$^\forall x \in \overline{M}$ に対し path $l:[0.1] \to \overline{M}$ s.t. $l(0)=x_0$ $l(1)=x$ により $H_p(W^u_{loc}(x), W^u_{loc}(x)-x) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 $O^u_x$ を $O^u_x = l_*(O^u_{x_0})$ で定める．

定理 C　$f: M \to M$ を P.O.T.P. を満たす拡大的な同相写像とする．$\pi: \overline{M} \to M$ は covering projection であり，$\overline{M}$ は連結かつ $f: M \to M$ を被覆する同相写像 $\overline{f}: \overline{M} \to \overline{M}$ が存在するとしよう．そのとき $\overline{M}$ が u-orientable ならば，$^\exists l \in \mathbb{N}$，$^\forall m \in \mathbb{N}$ に対し $\mathrm{Fix}(\overline{f}^{lm})$ の各点は同じ不動点指数 $+1$ または $-1$ をもつ．

上の定理の証明のあらすじを述べる．

$M$ は compact だから，$0 < \rho_1 < \rho/2$ が存在して $^\forall x \in \overline{M}$ に対し $B_\rho(x) \supset [B_{\rho_1}(x), B_{\rho_1}(x)]$ が成立．

補題 2.9　$^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\overline{f}^n W^s_{2\varepsilon_0}(x) \subset W^s_\varepsilon(\overline{f}^n(x)),\quad \overline{f}^{-n} W^u_{2\varepsilon_0}(x) \subset W^u_\varepsilon(\overline{f}^{-n}(x))\ (^\forall x \in \overline{M}, n \geq N)$$

この補題より，$^\exists l > 0$，$^\forall x \in \overline{M}$ $^\forall n \geq l$ に対し

$$\overline{f}^n(W^s_{2\varepsilon_0}(x)) \subset W^s_{\rho_1}(\overline{f}^n(x)),\quad \overline{f}^{-n}(W^u_{2\varepsilon_0}(x)) \subset W^u_{\rho_1}(\overline{f}^{-n}(x)).$$

したがって　$g = \overline{f}^l$ とおくと，$^\forall x \in \overline{M}$ に対し

$$g: W^u_{loc}(x) \to W^u_{loc}(g(x)) \quad と \quad g^{-1}: W^u_{loc}(x) \to W^u_{loc}(g^{-1}(x))$$

は well-defined で，更にこれらの写像は開集合の上への同相写像であることが示される．

<u>補題 2.10</u>　$\overline{M}$ は定理 C と同じで、u-orientable とする．そのとき $\varepsilon = +1$ or $-1$ が存在して、$\forall x \in \overline{M}$ に対し

$g^{-1}_*$ ; $H_p(W^u_{loc}(x), W^u_{loc}(x)-x) \to H_p(W^u_{loc}(g^{-1}(x)), W^u_{loc}(g^{-1}(x))-g^{-1}(x))$

は $O^u_x$ を $\varepsilon O^u_{g^{-1}(x)}$ にうつす．

$h = g^m$ $(m \in \mathbb{N})$ とおく．$x \in Fix(h)$ に対し，$K^s_x = h(W^s_{loc}(x))$, $K^u_x = h^{-1}(W^u_{loc}(x))$ とおく．$K^s_x$ と $K^u_x$ はそれぞれ $W^s_{loc}(x)$ と $W^u_{loc}(x)$ の開集合で，$h : W^s_{loc}(x) \to W^s_{loc}(x)$ と，$h : K^u_x \to W^u_{loc}(x)$ の不動点はそれぞれ $x$ のみである。$W^s_{loc}(x)$, $W^u_{loc}(x)$ は Euclid 近傍縮体であることに注意する。$I^s_h(x)$ と $I^u_h(x)$ はそれぞれ $h: W^s_{loc}(x) \to W^s_{loc}(x)$ と $h: K^u_x \to W^u_{loc}(x)$ の不動点指数を表わすことにする．

<u>補題 2.11</u>　$\forall x \in Fix(h)$ に対し，$I^s_h(x) = +1$

<u>証明</u>　$H$ ; $W^s_{loc}(x) \times [0.1] \to W^s_{loc}(x)$ を $H(y,t) = [x, \exp_x(t \exp_x^{-1}(h(y)))]$ により定義する．$H$ の像はコンパクト集合 $[x, B_{\rho_1}(x)] \subset W^s_{loc}(x)$ に含まれる。そして $H(y,1) = h(y)$ , $H(y,0) = x$ である．よって $I^s_h(x)$ は 定値写像; $W^s_{loc}(x) \to x$ の不動点指数に等しい。よって [5] より $I^s_h(x) = +1$.

<u>補題 2.12</u>　$\forall x \in Fix(h)$ に対し，$I^u_h(x) = +1$ or $-1$ であり，その符号は $x \in Fix(h)$ に依存しない．

<u>証明</u>　補題 2.10 を使う．略

<u>定理 C の証明</u>

図式；

$$
\begin{tikzcd}
K^u_x \times W^s_{loc}(x) \arrow[r, "h\times h"] \arrow[d, "{[\,,\,]}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W^u_{loc}(x) \times K^s_x \arrow[d, "{[\,,\,]}"] \\
{[K^u_x,\ W^s_{loc}(x)]} \arrow[r] & {[W^u_{loc}(x),\ K^s_x]}
\end{tikzcd}
$$

は可換である．$[K^u_x, W^s_{loc}(x)]$ は $x$ の近傍だから $h$ の $x$ における不動点指数 $I_h(x)$ は，[5] より，$I_h(x) = I^u_h(x) \cdot I^s_h(x)$

よって補題 2.11 と補題 2.12 より定理 C を得る．

## §3. 定理 A について

$Per(f)$ は $f$ の周期点全体の集合，$\Omega(f)$ は $f$ の non wandering set を表わす．

<u>定理 3.1 [1]</u>　$X$ はコンパクト距離空間，$f: X \to X$ は P.O.T.P. を満たす拡大的な同相写像とする。そのとき次が成立する：

1) $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$,

2) $\Omega(f)$ は互いに交わらない有限個の $f$ 不変な閉集合 $\Omega_1, \cdots, \Omega_s$ の和集合で、更に $f|_{\Omega_i} ; \Omega_i \circlearrowleft$ は topological transitive,

3) 各 $\Omega_i$ は互いに交わらない有限個の閉集合 $\Omega_{i,j}$ $(j=1,\cdots,n_i)$ の和集合で、$f(\Omega_{i,j}) = \Omega_{i,j+1}$ （ただし，$\Omega_{i,n_i+1} = \Omega_{i,1}$）かつ $f^{n_i}|_{\Omega_{i,j}} ; \Omega_{i,j} \circlearrowleft$ は topological mixing.

<u>定理 3.2</u>　$f: T^n \to T^n$ は定理 A と同じとする．そのとき

$f_* ; H_1(T^n;\mathbb{R}) \longrightarrow H_1(T^n;\mathbb{R})$ は双曲型.

証明　$2E : T^n \to T^n$ を $x \mapsto 2x$ で定義する. $\tilde{f}: T^n \to T^n$ をこの covering projection に対する $f: T^n \to T^n$ の被覆とする. §2の命題2.8より被覆空間 $T^n$ は u-orientable. 定理Cより $\exists \ell \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathrm{Fix}(\tilde{f}^{\ell m})$ の各点は同じ不動点指数 $+1$ 又は $-1$ をもつ.
$g = \tilde{f}^{\ell}$ とおく. $g^m$ の不動点の個数 $N_m(g)$ は

$$N_m(g) = \Big| \sum_{x \in \mathrm{Fix}(g^m)} I_{g^m}(x) \Big| = |I(g^m)|$$

$g_* ; H_1(T^n;\mathbb{R}) \circlearrowleft$ の固有値を $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ とすると, $g^m$ の Lefschetz数 $\lambda(g^m)$ は

$$\lambda(g^m) = (1-\lambda_1^m) \cdot \cdots \cdot (1-\lambda_n^m)$$

よって Lefschetz の不動点公式より

$$N_m(g) = \prod_{i=1}^{n} |1-\lambda_i^m|$$

定理B, 定理3.1 を使って Manning の方法より $|\lambda_i| \neq 1$.
したがって $\tilde{f}_* : H_1(T^n;\mathbb{R}) \circlearrowleft$ もまた双曲型. $f_* = (2E)_* \circ \tilde{f} \circ (2E)_*^{-1}$ より結論を得る.

<u>定理Aの証明について</u>

定理3.2より $f: T^n \to T^n$ と homotopic な自己同型 $g: T^n \to T^n$ は双曲型である. [7] より id. と homotopic な連続写像 $h: T^n \to T^n$ が存在して, $g \circ h = h \circ f$ を満たす. [6], [13] の証明とほぼ同様に, $h$ は同相写像であることが証明される.

## §4. 閉曲面上の P.O.T.P. を満たす拡大的な同相写像

<u>定理 D</u>　$M^2$ は 2 次元閉多様体，$f: M^2 \to M^2$ は P.O.T.P. を満たす拡大的な同相写像とする。そのとき $M^2$ は $T^2$ である．

<u>補題</u>　N は境界のない連結な 2 次元多様体、X と Y は non degenerate であるとする。$X \times Y$ と N が同相ならば、X, Y は $\mathbb{R}$ 又は $S^1$ である．

<u>証明</u>　§2 の補題 2.3 を使う．略

<u>定理 D の証明について</u>

補題を使って $W^u_{loc}(x)$, $W^s_{loc}(x)$ は $\mathbb{R}$ に同相であることがわかる．そこで id. に十分近い不動点をもたない連続写像 $h: M^2 \to M^2$ を構成する．したがって オイラー標数 $\chi(M^2) = 0$ が示される。定理 A を使って [7] と同様の議論により，$\pi_1(M^2)$ は free abelian であることが示される．

## References

[1] N. Aoki, The properties of homeomorphisms with the P.O.T.P..

[2] R. Bowen, Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math., 92 (1970), 725 − 747.

[3] 〃 , Markov partitions and minimal sets for Axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math., 92 (1970), 907 − 918

[4] 〃 , Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470, New York, 1975.

[5] A. Dold , Fixed point index and fixed point theorem for Euclidian neighborhood retracts, Topology, 4 (1965), 1-8.

[6] J. Franks, Anosov diffeomorphisms on tori, Trans. AMS, 145 (1964), 117-124.

[7] 〃 , Anosov diffeomorphisms, Global analysis, Proc. Symos. Pure Math., 14 (1970), AMS, 61-93.

[8] K. Hiraide, On homeomorphisms with Markov partitions.

[9] 〃 , Fixed point index of expansive homeomorphisms with the pseudo orbit tracing property.

[10] 〃 , Topological calacterization of expansive homeomorphisms of tori satisfying the pseudo orbit tracing property.

[11] R. Mañé , Expansive homeomorphism and topological dimension, Trans. A.M.S., 252 (1979), 313-319.

[12] A. Manning , Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, Bull. London Math. Soc., 3 (1971), 215-220

[13] 〃 , There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, Amer. J. Math., 96 (1974), 422-429

[14] A. Morimoto, 擬軌道追跡の方法と力学系の安定性, 東大セミナリーノート, 39 (1979)

[15] D. Ruelle, Thermodynamic formalism - The mathematical structure of classical equilibrium statistical mechanics, Encyclopedia of Math. Appl., Vol. 5, Addison-Wesley, 1978.

[16] S. Smale, Differentiable dynamical systems, Bull. A.M.S., 73 (1967), 747-817.

[17] E.H. Spanier, Algebraic Topology, Mc Graw-Hill, New York, 1966